



Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **scientifique**

Voie : **Biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST)**

Discipline : **Mathématiques**

Seconde année

Programme de mathématiques BCPST2

Préambule

Objectifs de la formation

En classe de BCPST2 l'objectif est, dans le cadre d'un approfondissement de la formation, d'amener l'étudiant à intégrer les différentes étapes permettant de résoudre un problème exprimable de façon mathématique. L'enjeu est la reformulation et la résolution de problèmes issus de contextes ou de réalités a priori non mathématiques (provenant souvent d'autres disciplines).

Ainsi sont mises en jeu diverses compétences. Certaines ont déjà été envisagées en première année (BCPST1), et sont consolidées en seconde année :

1. Engager une recherche, définir une stratégie.
2. Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique.
3. Représenter, changer de registre.
4. Raisonner, démontrer, argumenter. . .
5. Calculer (symboliquement ou numériquement avec une calculatrice ou un ordinateur), maîtriser le formalisme mathématique.
6. Communiquer à l'écrit et à l'oral.

D'autres constituent des objectifs plus spécifiquement approfondis en seconde année, dans la perspective des concours :

- Identifier un problème sous différents aspects ;
- Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes ;
- Critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Buts visés

Le programme de mathématiques de BCPST2 approfondit celui de BCPST1, ce qui se traduit par les enjeux suivants.

- Consolider les acquis mathématiques de BCPST1, notamment en matière de calcul et raisonnement. Par souci de clarté, il a été choisi de numéroter de manière compatible les têtes de chapitre des programmes de BCPST1 et de BCPST2.
- Généraliser et compléter les concepts introduits en BCPST1.
- Mettre un accent particulier sur la notion de modélisation, où se confrontent les mathématiques et les autres sciences, notamment dans le cadre des T.I.P.E.

Équilibre entre compétences

Les différentes compétences sont développées puis évaluées (au cours de l'année puis lors des concours) en veillant à leur équilibre. On prend garde en particulier à ne pas surdévelopper une compétence par rapport à une autre.

Les capacités en calcul par exemple (point 5 ci-dessus), lorsqu'elles sont propres aux mathématiques, restent relativement simples, l'objectif n'étant pas ici d'aboutir à une virtuosité technique. On

attend, en la matière, une maîtrise solide des calculs, concepts et théorèmes mathématiques, dans des situations courantes, sans pour autant négliger les autres compétences.

Contenu

Le programme de seconde année combine des révisions du programme de première année, des approfondissements de certaines parties et des nouveautés.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

En **algèbre linéaire**, le passage de K^n aux espaces vectoriels généraux permet d'élargir le champ d'action et de donner une vision géométrique des espaces de fonctions. Ce cadre plus systématique permet de donner un sens à l'étude des bases et changements de base qui sont fondamentaux pour aborder les valeurs propres et vecteurs propres des applications linéaires et des matrices ; cette dernière approche se limite à la diagonalisation pour s'en tenir à des phénomènes simples. En vue de nombreuses applications (optimisation, analyse de données), est proposée une présentation du produit scalaire dans \mathbf{R}^n et du théorème de projection orthogonale. La notion de sous-espaces supplémentaires ne figure pas au programme, mais dans bien des situations le théorème de la projection orthogonale fournit une approche similaire tout en permettant un calcul effectif.

L'**analyse** apparaît sous forme de révision et est constamment présente dans les parties consacrées aux probabilités. C'est ainsi que les séries sont introduites comme outil de base des probabilités, tandis que l'étude des intégrales généralisées est insérée dans la mise en place des variables aléatoires à densité ; l'usage de ces outils est limité aux contextes probabilistes et aux démarches de modélisation ; on évitera les développements artificiels ou purement techniques à ce propos. Enfin, l'étude des couples de variables aléatoires discrètes conduit à définir, de manière très limitée, une notion de séries doubles.

L'étude des **probabilités** est donc un enjeu majeur du programme de seconde année. Le but de ce parcours est de mettre en place, de la manière la plus efficace possible, un contexte opérationnel permettant d'utiliser aussi bien des variables aléatoires discrètes prenant une infinité de valeurs (amenant notamment les lois géométrique et de Poisson) que des variables aléatoires à densité (dites « continues »), avec un accent particulier sur les variables gaussiennes. Pour maintenir le programme dans un volume raisonnable, les couples de variables aléatoires ne sont abordés que pour les variables discrètes, ce qui évite d'avoir à aborder les intégrales doubles. Les démarches de simulation de variables aléatoires sont fortement encouragées.

Une présentation de quelques concepts et résultats de **statistique inférentielle** permet de mettre en place un cadre précis pour les tests d'hypothèse.

La variété des modèles ainsi mis en place, combinés avec les différents théorèmes limites proposés, permet d'aborder de nombreuses applications dans les domaines les plus divers ; l'évocation de ces contextes applicatifs est un élément important de la formation et fait partie des buts visés. Comme dans le programme de première année, on signale par un symbole \Rightarrow certaines situations particulières où un lien avec d'autres enseignements scientifiques est encouragé, permettant de donner corps aux démarches de modélisation et d'application pratique des mathématiques.

En prolongement des programmes de première année en mathématiques et informatique, le programme encourage la **démarche algorithmique** et le recours aux **outils informatiques** ; le maniement de ces outils fait partie intégrante de la formation et a toute sa place dans l'évaluation en cours d'année et lors des concours.

Pour ce qui concerne les **révisions**, la proposition de consolider les compétences acquises en première année par quelques exercices ne doit pas être prise dans un sens restrictif : des approches

numériques, pouvant s'appuyer sur le programme d'informatique ou recourir à des outils logiciels ou des calculatrices, peuvent tout aussi bien renforcer la maîtrise des concepts et de leurs applications.

Programme de seconde année

La répartition en chapitres proposée ci-dessous (ainsi que l'agencement des chapitres de révisions) est fournie à titre indicatif et ne constitue pas une progression figée ou obligatoire. Les impératifs pédagogiques liés à la préparation aux concours peuvent justifier une organisation différente, sous réserve de maintenir une structure cohérente.

Le numérotation des chapitres reprend et complète celle du programme de première année.

Révisions 1 – Suites

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 1 et Analyse 5).

⇒ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 2 – Fonctions

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 2, Analyse 3, Analyse 6, Analyse 7, Analyse 8).

⇒ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 3 – Dénombrements

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Outils 6). L'objectif est de mettre en place des techniques de calcul de cardinaux d'évènements.

Révisions 4 – Statistique descriptive

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Statistique 1).

⇒ Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Probabilités 3 – Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires

Ce chapitre étend le cadre des probabilités qui avait été posé en première année (Probabilités 1) pour aborder une situation plus générale, se prêtant à la définition des variables aléatoires discrètes ou à densité.

Les séries sont introduites ici comme un outil pour donner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors de questions probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

On présente brièvement à cette occasion d'un point de vue axiomatique l'espérance, la variance et leurs propriétés générales. Elles seront reprises dans chacun des contextes étudiés (variables discrètes et continues).

Contenus	Commentaires
<p>a) Séries réelles</p> <p>Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente.</p> <p>Combinaison linéaire de séries convergentes.</p> <p>Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs u_n et v_n telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.</p> <p>Convergence et somme de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ (pour $q < 1$) et des séries « dérivées » $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$.</p> <p>Convergence et somme de la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.</p> <p>Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.</p> <p>Convergence absolue.</p>	<p>La série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$. En cas de convergence, la somme de la série est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.</p> <p>Tout autre critère de convergence (équivalents, etc.) est hors programme.</p> <p>Résultat admis.</p> <p>L'étude générale des séries de Riemann est hors programme.</p> <p>La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de la série.</p> <p>En vue des applications probabilistes, on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.</p> <p>L'étude de séries semi-convergentes est hors programme.</p>
<p>b) Notion de probabilité</p> <p>Notion de tribu.</p> <p>Définition d'une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}).</p> <p>Révision et extension à ce nouveau cadre des propriétés des probabilités et des définitions vues en première année, en particulier :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Soit $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbf{N}\}$. Si $(p_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum_{i \geq 0} p_i$ converge et a pour somme 1, alors il existe une et une seule probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. • Une suite d'évènements (A_n) est un système complet d'évènements si les A_n sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est égale à Ω. 	<p>On convient de nommer évènements les éléments d'une tribu.</p> <p>Une tribu \mathcal{T} (ou σ-algèbre) sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant Ω, stable par passage au complémentaire et telle que, pour toute suite (B_n) d'évènements, la réunion des B_n est un évènement.</p> <p>Aucune question sur les tribus ne doit être proposée dans une épreuve de mathématiques.</p> <p>On met en valeur l'axiome de σ-additivité $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$ pour des suites (B_n) d'évènements deux à deux incompatibles, et on fait remarquer que la série $\sum_{n \geq 0} P(B_n)$ converge.</p> <p>Les résultats sur la probabilité d'une réunion (resp. intersection) croissante (resp. décroissante) sont hors programme.</p> <p>On distingue l'évènement impossible (resp. certain) des évènements de probabilité nulle (resp. de probabilité 1).</p> <p>Résultat admis.</p> <p>Pour une telle suite, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.</p>

Contenus (suite)	Commentaires
<ul style="list-style-type: none"> Formule des probabilités totales : si (A_n) est un système complet d'évènements, alors, pour tout évènement B, la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n \cap B)$ converge et $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$. Indépendance de deux évènements. Indépendance (mutuelle) de n évènements ; d'une suite d'évènements. 	<p>Cette formule reste valable dans le cas d'une suite (A_n) d'évènements deux à deux incompatibles et tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$; on dira dans ce cas que le système est quasi-complet.</p> <p>Interprétation en termes de probabilités conditionnelles, avec la convention suivante : si $P(A_n) = 0$, alors on pose $P(A_n)P(B A_n) = 0$.</p>
<p>c) Variables aléatoires réelles</p> <p>On nomme variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{T}) toute application X de Ω dans \mathbf{R} telle que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$, noté $(X \leq a)$, soit un évènement.</p> <p>Si I est un intervalle de \mathbf{R}, alors $(X \in I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est un évènement.</p> <p>Fonction de répartition : $F_X : t \mapsto P(X \leq t)$.</p> <p>Croissance, limites en $\pm\infty$.</p> <p>Indépendance de deux variables aléatoires. Indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires ; d'une suite de variables aléatoires.</p> <p>Deux variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si pour tous intervalles I et J on a $P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I) P(Y \in J)$.</p> <p>Propriétés de l'indépendance mutuelle :</p> <ul style="list-style-type: none"> Si X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi. Si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes, alors $u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_n(X_n)$ sont indépendantes. 	<p>Aucune vérification du fait qu'une fonction est une variable aléatoire ne sera demandée dans une épreuve de mathématiques.</p> <p>Résultat admis.</p> <p>Les propriétés de limites sont admises.</p> <p>On illustre la notion de fonction de répartition au moyen des variables aléatoires finies étudiées en première année.</p> <p>Lorsqu'on a une hypothèse d'expériences indépendantes, les variables associées sont indépendantes.</p> <p>Résultat admis.</p> <p>Ces résultats sont admis.</p>
<p>d) Espérance et variance</p> <p>Espérance. Notion de variable centrée.</p> <p>Généralisation des propriétés et des définitions vues en première année, en particulier :</p> <ul style="list-style-type: none"> Variance et moments d'une variable aléatoire. Signe de la variance. Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite. Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite. Si X et Y sont indépendantes, on a : $E(XY) = E(X)E(Y)$, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. 	<p>En s'appuyant sur le programme de première année, on admet qu'il existe une fonction espérance notée E, définie sur une partie de l'ensemble des variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{T}, P), à valeurs dans \mathbf{R}, possédant au moins les propriétés de linéarité, de positivité et vérifiant $E(1) = 1$.</p> <p>Ce développement doit rester modeste.</p> <p>X^* est appelée variable centrée réduite associée à X.</p> <p>Résultat admis.</p> <p>Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.</p>

Exemples de capacités : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une probabilité ; calculer la probabilité d'un évènement ; exploiter une hypothèse d'indépendance pour calculer des probabilités.

Révisions 5 – Nombres complexes et polynômes

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Outils 2, Outils 3 et Algèbre).

Révisions 6 – Systèmes linéaires et matrices

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Algèbre linéaire 1 et 2).

Algèbre linéaire 3 – Espaces vectoriels

Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité (K^n) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non.

La notion de somme de sous-espaces vectoriels n'est pas au programme.

On travaille dans $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} .

Contenus	Commentaires
<p>a) Structure vectorielle Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.</p> <p>Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels. Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence). Famille libre finie. Famille liée finie. Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre. Base finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence). Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base. Bases canoniques de K^n et $K_n[X]$.</p>	<p>On met plus particulièrement en valeur les espaces vectoriels suivants : K^n, l'ensemble des applications définies sur un intervalle I à valeurs dans K, $K[X]$, $K_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. L'étude d'espaces de suites n'est pas un objectif du programme.</p> <p>On introduit la notation $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k)$.</p> <p>D'autres exemples peuvent être proposés, mais les attendus du programme se limitent aux cas mentionnés.</p>
<p>b) Dimension De toute famille génératrice finie d'un espace E, on peut extraire une base. Toutes les bases de E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E.</p> <p>Dans un espace vectoriel de dimension n :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Toute famille libre a au plus n éléments. 	<p>Ce résultat et le suivant sont admis.</p> <p>On dit alors que E est un espace vectoriel de dimension finie.</p>

Contenus (suite)	Commentaires
<ul style="list-style-type: none"> • Une famille libre ayant n éléments est une base. • Toute famille génératrice a au moins n éléments. • Une famille génératrice ayant n éléments est une base. <p>Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.</p> <p>Rang d'une famille finie de vecteurs.</p>	<p>Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres.</p> <p>Ce rang peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.</p>

Exemples de capacités : trouver une base et la dimension d'un espace vectoriel ; calculer le rang d'une famille finie de vecteurs ; capacités d'abstraction (ou d'adaptation) pour concevoir une fonction, un polynôme ou une matrice comme un vecteur.

Révisions 7 – Intégrales

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 9).
 \Rightarrow Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Révisions 8 – Équations différentielles

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 4 et Analyse 10).
 \Rightarrow Exemples en lien avec le programme d'informatique.

Probabilités 4 – Variables aléatoires à densité

Ce chapitre reprend les probabilités dites « continues » (présentées en classe terminale) en les insérant dans un contexte cohérent avec ce qui précède, et met en place les modèles continus les plus courants : uniforme, exponentiel, normal.

Les intégrales généralisées sont introduites ici pour définir les variables aléatoires à densité. En dehors de questions probabilistes, les intégrales généralisées ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

Contenus	Commentaires
<p>a) Intégrales généralisées</p> <p>Convergence d'une intégrale généralisée (ou impropre) d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.</p> <p>Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur cet intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.</p> <p>Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.</p> <p>Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres.</p>	<p>La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive.</p> <p>Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.</p> <p>On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.</p>

Contenus (suite)	Commentaires
<p>Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.</p> <p>Cas des fonctions paires ou impaires. Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que $f \leq g$. Convergence absolue d'une intégrale généralisée.</p> <p>L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.</p>	<p>Si la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ convergent ou divergent simultanément, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.</p> <p>Tout autre critère de convergence (équivalents, etc.) est hors programme. La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale. Les intégrales semi-convergentes sont hors programme. La valeur de cette intégrale est un résultat admis.</p>
<p>b) Variables aléatoires admettant une densité</p> <p>On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$:</p> $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$ <p>X admet une densité si, et seulement si sa fonction de répartition F_X est continue sur \mathbf{R} et de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.</p> <p>Exemples de recherche de la loi du minimum et du maximum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes. Si une fonction f est définie sur \mathbf{R}, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1 alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité. Espérance. Propriétés. Théorème de transfert. Inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments. Propriétés.</p>	<p>Une telle fonction, qui n'est pas unique, est appelée densité de X. On peut alors exprimer la probabilité d'un évènement du type $P(X \in I)$ (I étant un intervalle) au moyen d'une intégrale. Résultat admis. Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une. Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.</p> <p>Résultat admis. Une telle fonction est dite densité de probabilité sur \mathbf{R}.</p> <p>La linéarité de l'espérance est admise. Résultat admis.</p> <p>Reprise rapide des définitions et propriétés vues dans le chapitre Probabilités 3.</p>
<p>c) Lois usuelles</p> <p>Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance, variance.</p> <p>Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance, variance.</p>	<p>\Leftrightarrow La loi uniforme sur $[a, b]$ modélise le choix au hasard d'un réel entre a et b; les fonctions de « nombre au hasard » incluses dans les calculatrices et langages de programmation permettent de simuler la loi uniforme; ces questions sont présentées en lien avec l'enseignement d'informatique.</p> <p>\Leftrightarrow On met en valeur la propriété d'invariance temporelle : $P(X \geq s + t X \geq s) = P(X \geq t)$ et on donne quelques exemples d'expériences donnant du sens à cette propriété.</p> <p>\Leftrightarrow La loi exponentielle peut être simulée à partir d'une simulation de la loi uniforme sur $]0, 1[$.</p>

Contenus (suite)	Commentaires
<p>Loi normale (ou gaussienne) centrée et réduite : densité, espérance et variance.</p> <p>Loi normale de paramètres μ et σ^2 : densité, espérance et variance. Si X suit une loi normale, alors $aX + b$ aussi si $a \neq 0$.</p>	<p>On obtient les valeurs de la fonction de répartition (notée Φ) et de sa réciproque (dite fonction des quantiles et notée $\alpha \mapsto u_\alpha$) au moyen de la calculatrice ou d'une bibliothèque associée à un langage de programmation. \Leftrightarrow On peut utiliser la fonction des quantiles et une simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ pour simuler une loi normale.</p> <p>Pour une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on se ramènera le plus souvent à la variable centrée réduite associée.</p>
<p>d) Sommes de variables aléatoires à densité indépendantes</p> <p>Loi de la somme de deux variables indépendantes à densité.</p> <p>Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes.</p>	<p>Le résultat est admis. La formule du produit de convolution devra être rappelée en cas de besoin.</p> <p>Le calcul montrant la normalité de la somme n'est pas un attendu du programme. On généralise le résultat au cas de n variables gaussiennes indépendantes. \Leftrightarrow Application à la modélisation des erreurs dans les processus de mesurage.</p>

Exemples de capacités : justifier le fait qu'une variable aléatoire admet une densité ; calculer une espérance et une variance ; appliquer la formule du produit de convolution.

Algèbre linéaire 4 – Applications linéaires et matrices

Le passage aux espaces vectoriels quelconques pousse à redéfinir les notions liées aux applications linéaires. Il convient de faire cette adaptation avec une certaine brièveté afin de garder tout le temps requis pour traiter des exemples.

On travaille dans $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} .

Contenus	Commentaires
<p>a) Applications linéaires</p> <p>Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes.</p> <p>Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.</p> <p>Noyau. Lien avec l'injectivité.</p> <p>Image. Lien avec la surjectivité.</p>	<p>On introduit les notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$, mais leur étude n'est pas un attendu du programme. Notation f^n pour $n \geq 0$.</p> <p>On montre que le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ. On montre que l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.</p>
<p>b) Cas de la dimension finie</p> <p>Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.</p> <p>Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.</p> <p>Rang d'une application linéaire.</p> <p>Théorème du rang.</p>	<p>Tout espace de dimension n est isomorphe à K^n.</p> <p>Résultat admis.</p>

Contenus (suite)	Commentaires
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension (finie), il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.	
c) Matrices et applications linéaires Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux. Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque. Interprétation d'une matrice comme application linéaire de K^p dans K^n .	On montre qu'un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible, et qu'il suffit pour cela de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite. Cette interprétation permet de parler d'image, noyau et de rang de la matrice en lien avec les mêmes notions pour les applications linéaires.
d) Changement de base Changement de base. Matrice de passage. Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur. Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables.	\Leftrightarrow On souligne le lien avec l'usage des référentiels en Physique, tout en notant que les changements de référentiels ne se limitent pas à des changements de base. On met en valeur l'intérêt des matrices semblables pour le calcul des puissances.

Exemples de capacités : obtenir la matrice d'une application linéaire dans des bases données ; déterminer un noyau et une image ; opérer un changement de bases ; démontrer que deux matrices sont semblables.

Probabilités 5 – Variables aléatoires réelles discrètes

L'ensemble de ce chapitre donne l'occasion de revoir, par le biais d'exercices, les lois de probabilités finies présentées dans le programme de première année (Probabilités 2).

Contenus	Commentaires
a) Variables aléatoires réelles discrètes Une variable aléatoire réelle est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est indexé par une partie de \mathbf{N} . Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète. Espérance. Propriétés. Théorème de transfert. Inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments. Propriétés.	On met en valeur le système complet formé des événements $(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$. Résultat admis. Reprise rapide des définitions et propriétés vues dans le chapitre Probabilités 3.
b) Lois usuelles discrètes Loi de Poisson. Espérance, variance. Approximation dans certains cas d'une loi binomiale par une loi de Poisson.	On illustrera cette approximation à l'aide d'histogrammes.

Contenus (suite)	Commentaires
Loi géométrique. Espérance et variance.	On présente la loi géométrique comme loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. \Rightarrow Propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique. Exemples de situations expérimentales modélisées par une loi géométrique.

Exemples de capacités : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une variable aléatoire ; calculer une espérance ; calculer une variance.

Probabilités 6 – Couples de variables aléatoires discrètes

Ce chapitre permet, par le maniement de sommes de séries, d'avoir une approche assez complète des phénomènes liés aux couples de variables aléatoires : lois conjointes, lois marginales, indépendance.

Le programme se limite aux situations faisant intervenir des couples de variables aléatoires à valeurs positives et des séries doubles à termes positifs.

Contenus	Commentaires
<p>a) Séries doubles à termes positifs</p> <p>Notion de suite double (indexée par $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$).</p> <p>Pour toute suite double $(u_{n,p})$ de réels positifs ou nuls, on a</p> $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ <p>dès que l'une des deux expressions est constituée de séries convergentes.</p>	<p>Résultat admis.</p> <p>La justification de la convergence se fait au cours du calcul de la somme double.</p>
<p>b) Couples de variables aléatoires discrètes</p> <p>Couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes positives. Loi conjointe.</p> <p>Lois marginales.</p> <p>Lois conditionnelles.</p> <p>Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$ pour une fonction u positive.</p> <p>Covariance. Variance de $X + Y$.</p> <p>Deux variables discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.</p> <p>Propriétés de l'indépendance : pour deux variables discrètes X et Y indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.</p> <p>Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X, Y)$, le couple (X, Y) ayant une loi conjointe connue.</p> <p>Cas particulier de la somme de deux variables discrètes à valeurs dans \mathbf{N}.</p> <p>Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson.</p>	<p>L'évènement $((X = x) \cap (Y = y))$ est également noté $(X = x, Y = y)$.</p> <p>Résultat admis.</p> <p>Justification de $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.</p> <p>Résultat admis.</p> <p>Loi conjointe de deux variables discrètes indépendantes.</p> <p>On remarque que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.</p> <p>On s'intéressera en particulier au maximum et au minimum de 2 ou de n variables aléatoires indépendantes.</p> <p>Les deux variables ne sont pas nécessairement indépendantes.</p> <p>Généralisation au cas de n variables.</p>

Exemples de capacités : trouver les lois marginales ; démontrer que deux variables sont indépendantes.

Algèbre linéaire 5 – Valeurs propres, vecteurs propres

Contenus	Commentaires
<p>a) Éléments propres Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée.</p> <p>Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.</p>	<p>On appelle spectre de l'endomorphisme f (respectivement de la matrice A), l'ensemble des valeurs propres de f (respectivement de A). En dimension finie, on fait le lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.</p>
<p>b) Diagonalisation Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable. Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n. Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.</p>	<p>Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.</p> <p>On fait observer que les sous-espaces propres sont de dimension 1.</p>

Exemples de capacités : diagonaliser une matrice ; calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans moyens de calcul).

Révisions 9 – Géométrie

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Géométrie 1).

Géométrie 2 – Produit scalaire dans \mathbf{R}^n

Ce chapitre propose une extension modeste des notions de géométrie euclidienne à l'espace euclidien de dimension n , avec la mise en place de deux résultats fondamentaux pour les applications : la projection orthogonale sur un sous-espace d'une part et la diagonalisation des matrices symétriques d'autre part.

Dans ce chapitre, les mots « vecteur » et « point » peuvent être considérés comme interchangeable.

Contenus	Commentaires
<p>a) Produit scalaire dans \mathbf{R}^n Produit scalaire usuel dans \mathbf{R}^n. Écriture matricielle. Bilinéarité. Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Vecteurs orthogonaux. Théorème de Pythagore.</p>	<p>La discussion des cas d'égalité n'est pas un objectif du programme. L'orthogonalité d'une famille de vecteurs non nuls entraîne sa liberté.</p>

Contenus (suite)	Commentaires
<p>Bases orthonormales de l'espace \mathbf{R}^n ou d'un sous-espace de \mathbf{R}^n.</p> <p>Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.</p>	<p>On souligne le fait que le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales.</p> <p>On réinterprète la définition en termes de matrice de passage P de la base canonique à une base orthonormale (relation ${}^tPP = I_n$).</p> <p>Les algorithmes d'orthonormalisation ne sont pas au programme.</p> <p>Il s'agit de l'énoncé suivant (qui est admis) : si A est une matrice symétrique réelle il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = {}^tP$.</p>
<p>b) Projection orthogonale</p> <p>Distance entre deux vecteurs (ou points).</p> <p>Définition de la distance d'un vecteur (ou point) à une partie non vide.</p> <p>On appelle projection orthogonale sur un sous-espace F de \mathbf{R}^n un endomorphisme p de \mathbf{R}^n tel que : pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $p(x) \in F$ et pour tout $y \in F$, $p(x) - x$ est orthogonal à y.</p> <p>Existence et unicité de la projection orthogonale p sur un sous-espace F de \mathbf{R}^n.</p> <p>Relation $p \circ p = p$.</p> <p>$\text{Im}(p) = F$.</p> <p>Distance d'un vecteur (ou point) à un sous-espace de \mathbf{R}^n.</p>	<p>Cette notion peut être interprétée en tant que démarche d'optimisation voire de meilleure approximation.</p> <p>On rappelle que les notions générales de sommes de sous-espaces vectoriels et de projections ne sont pas au programme.</p> <p>On admet qu'il existe une base orthonormale du sous-espace F.</p> <p>Écriture de la projection orthogonale dans une base orthonormale de F.</p> <p>On remarque que $\text{Ker}(p)$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux vecteurs de F.</p> <p>Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2.</p>

Exemples de capacités : calculer une projection orthogonale, une plus courte distance.

Révisions 10 – Fonctions de deux variables

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 11).

Statistique 2 – Théorèmes limites et statistique inférentielle

L'objectif de ce chapitre est d'initier les étudiants au vocabulaire et à la démarche de la statistique inférentielle sur quelques cas simples, en leur présentant le problème de l'estimation par intervalle et du test de conformité. Il ne doit en aucun cas faire l'objet d'un développement théorique. On pourra illustrer par des exemples pris dans la vie courante et dans les autres disciplines.

Contenus	Commentaires
<p>a) Vocabulaire de l'échantillonnage et de l'estimation</p> <p>X étant une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2, un n-échantillon de X est un n-uplet (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.</p> <p>Un estimateur d'un paramètre (μ ou σ^2) est une suite (T_n) de variables aléatoires, chaque T_n étant une fonction de (X_1, X_2, \dots, X_n) donnant de l'information sur le paramètre choisi.</p>	<p>La valeur de T_n obtenue à partir d'un échantillon observé est l'estimation du paramètre.</p> <p>Aucun développement ne sera fait sur les estimateurs et on se limitera aux deux estimateurs cités ci-dessous.</p>

Contenus (suite)	Commentaires
<p>On définit l'erreur d'estimation comme la différence entre l'estimateur et la valeur du paramètre, et le biais comme l'espérance de l'erreur d'estimation.</p> <ul style="list-style-type: none"> La moyenne empirique, notée M_n et définie par $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, est un estimateur de μ. La variance empirique, notée S_n^2, et définie par $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - M_n^2,$ est un estimateur de σ^2. 	<p>La variable M_n est souvent notée \bar{X}_n. On remarque que M_n est un estimateur sans biais de μ et que la variance de l'erreur d'estimation $M_n - \mu$, qui vaut $\frac{\sigma^2}{n}$, tend vers 0. On remarque que le biais de S_n^2 tend vers 0. L'usage de l'estimateur corrigé de la variance $S_n'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$, parfois employé dans les applications, n'est pas un objectif du programme.</p>
<p>b) Théorèmes limites Inégalité de Bienaymé–Tchebychev. Loi faible des grands nombres. Théorème central limite (première forme) : Étant donnée une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2 non nulle, alors, pour tous réels a, b tels que $a < b$, en posant $M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ on a :</p> $P(a < M_n^* < b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt.$ <p>Cas de la loi binomiale : théorème de de Moivre–Laplace. Théorème central limite (seconde forme) : Étant donnée une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ de même loi, admettant une espérance μ et une variance, alors, pour tous réels a, b tels que $a < b$, on a :</p> $P\left(a < \frac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} < b\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt,$ <p>S_n désignant l'écart-type empirique.</p>	<p>Théorème admis. On obtient ainsi une approximation asymptotique de la loi de l'erreur d'estimation réduite $\varepsilon(M_n) = M_n^*$. \Leftrightarrow Illustration numérique de cette convergence à l'aide de tirages répétés d'une loi uniforme ou exponentielle.</p> <p>Théorème admis. Cette version est utilisée lorsqu'on ne connaît pas σ^2.</p>
<p>c) Applications statistiques Intervalle de confiance :</p> $P\left(\left[M_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < M_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha$ <p>où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Test de conformité sur la moyenne : pour tester l'hypothèse $(H_0) : \mu = \mu_0$, on utilise que</p> $P\left(\left \frac{M_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$	<p>Ce résultat est une conséquence directe de la seconde forme du théorème central limite. On en déduit une fourchette d'estimation du paramètre μ, appelé aussi intervalle de confiance de niveau de confiance $1 - \alpha$.</p> <p>Ce résultat est une conséquence directe de la seconde forme du théorème central limite. On rejette l'hypothèse si la valeur observée de $\frac{M_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ est en dehors de l'intervalle $[-u_{1-\frac{\alpha}{2}}, u_{1-\frac{\alpha}{2}}]$.</p>

Exemples de capacités : trouver un intervalle de confiance de la moyenne ; faire un test de conformité sur la moyenne.