

1. Notion de limite :

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction et C_f sa courbe représentative.

a - Limites à l'infini :

On suppose, dans ce paragraphe, que f est définie sur un intervalle $]b ; +\infty[$ ($b \in \mathbb{R}$).

☺ On dira que f est définie au voisinage de $+\infty$.

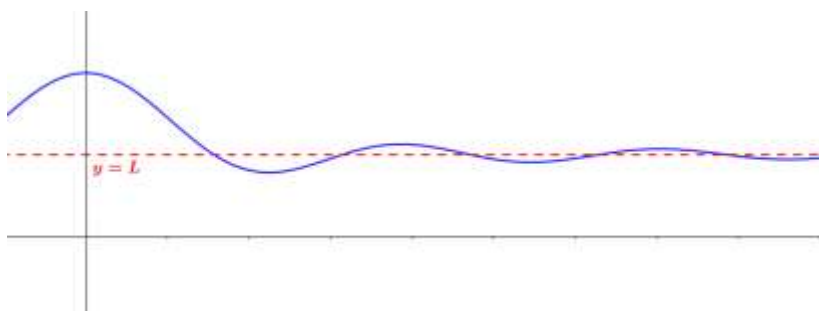
Définition et notation : Limite finie et asymptotes horizontales.

Soit L un nombre réel.

Intuitivement, on dira que la fonction f tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$, si : $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

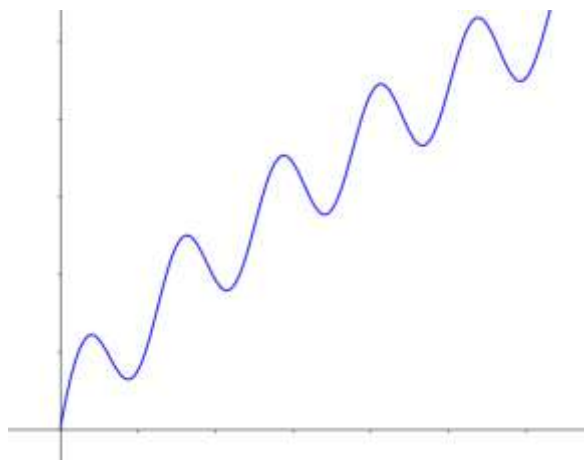
On dira alors que la droite d'équation : $y = L$, est asymptote (horizontale) à C_f en $+\infty$.



Définition et notation : Limite infinie.

• Intuitivement, on dira que la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



• Intuitivement, on dira que la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

☺ On étendra, sans difficulté, ces énoncés au cas où f est définie sur un intervalle $] -\infty, b[$ et où x tend vers $-\infty$.

b - Limite infinie en un point :

Soit a un nombre réel.

On suppose que f est définie sur un intervalle $]a, b[$ ($b \in \mathbb{R}$, avec : $a < b$) ou $]a, +\infty[$.

© On dira que f est définie au voisinage de a^+ .

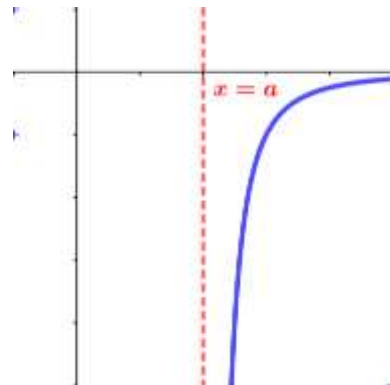
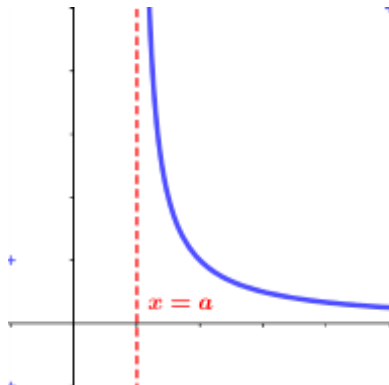
Définition et notation : Limites infinies et asymptotes verticales.

• Intuitivement, on dira que la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de a .

On note : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

• Intuitivement, on dira que la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de a .

On note : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.



• Dans l'un ou l'autre cas, on dira que la droite d'équation : $x = a$, est asymptote (verticale) à f .

© On étendra, sans difficulté, ces énoncés au cas où f est définie sur un intervalle $]b, a[$ ($b \in \mathbb{R}$, avec : $b < a$) ou $] -\infty, a[$.

On dira alors que la fonction f est définie au voisinage de a^- .

On étudiera alors les limites de f lorsque x tend vers a par valeurs inférieures.

Exercices 1, 2 & 3

c - Limites des fonctions de référence aux bornes de leurs ensembles de définition :

Fonction carré :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$,

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Fonction cube :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$,

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

Fonction racine carrée :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$,

Fonction inverse :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$,

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Fonction exponentielle :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$,

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$,

Fonction logarithme :

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$,

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$,

2. Opérations sur les limites :

f et g désignent deux fonctions ; L et L' deux nombres réels.

a - Limites d'une somme :

| | | | | | | |
|-------------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim(f)$ | L | L | L | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim(g)$ | L' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim(f+g)$ | $L+L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

b - Limites d'un produit :

| | | | | | | | | | |
|--------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim(f)$ | L | $L > 0$ | $L < 0$ | $L > 0$ | $L < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| $\lim(g)$ | L' | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ∞ |
| $\lim(f \times g)$ | $L \times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

c - Limites d'un quotient :

| | | | | | | | | | | | | |
|------------------|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim(f)$ | L | L | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $L > 0$ | $L < 0$ | $L > 0$ | $L < 0$ | ∞ | 0 |
| $\lim(g)$ | $L' \neq 0$ | ∞ | $L' > 0$ | $L' < 0$ | $L' > 0$ | $L' < 0$ | 0^+ | 0^+ | 0^- | 0^- | ∞ | 0 |
| $\lim(f \div g)$ | $L \div L'$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI | FI |

☞ L'abréviation **FI** (pour **Forme Indéterminée**) ne signifie pas que la fonction n'a pas de limite. Elle traduit seulement notre impossibilité **momentanée** à apporter une réponse à la question posée. La forme sous laquelle la fonction se présente, ne permet pas encore de déterminer sa limite, d'où son nom ! Mais la recherche de la limite ne peut pas s'arrêter là ! Il faudra alors chercher à transformer l'expression de la fonction pour pouvoir « lever l'indétermination » et ainsi déterminer sa limite éventuelle.

☺ Une fonction peut cependant ne pas admettre de limite en un point.

Propriété : Composition de fonctions.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, alors : $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

a , b et c peuvent être finis ou infinis.

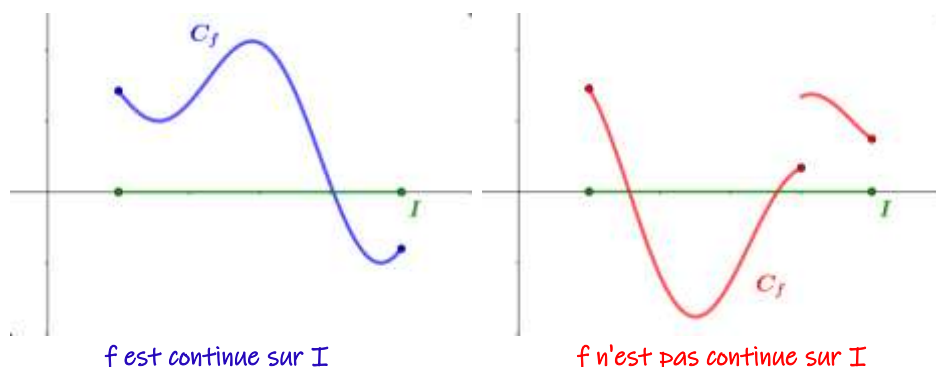
Exercices 4 & 5

3. Continuité :

Théorème :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I .

Intuitivement, on dira que f est **continue** sur I , si on peut tracer la représentation graphique f sans lever le crayon.



f est continue sur I

f n'est pas continue sur I

Théorème : Continuité des fonctions usuelles.

Les fonctions puissances, inverse, racine carrée, exponentielle et logarithme sont continues sur leurs ensembles de définition.

Théorème : Continuité et opérations.

La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues sur tout intervalle où ils sont définies.

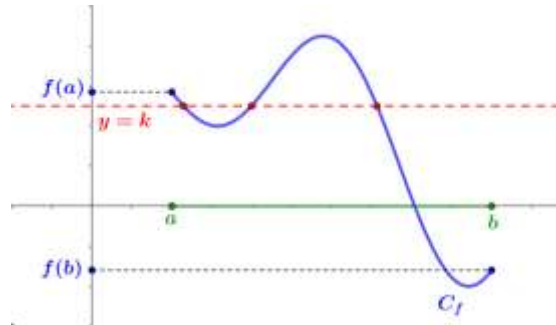
Exercices 6 & 7

4. Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $f(x) = k$, admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



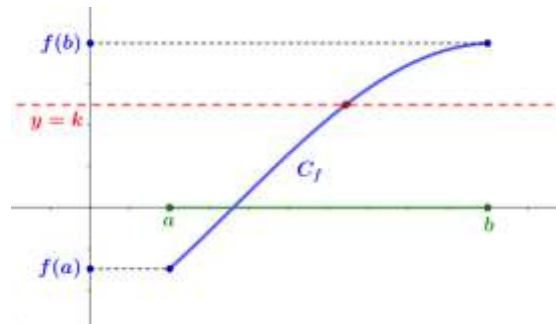
Cas particulier :

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation : $f(x) = 0$, admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème : Cas des fonctions strictement monotone.

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur $[a, b]$.

Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation : $f(x) = k$, admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.



Cas particulier :

Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$; et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors la fonction f s'annule une fois et une seule sur $[a, b]$.

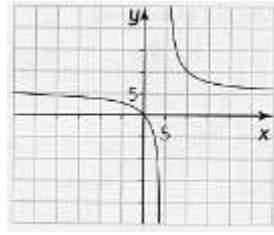
Exercices 8, 9 & 10

1 - LIMITES ET CONTINUITÉ - EXERCICES

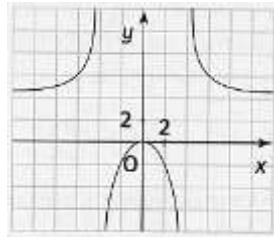
Temps indicatif à consacrer aux exercices : 4 à 6h.

Exercice 1 :

1. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



- Préciser l'ensemble de définition de f.
 - Conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Tracer les asymptotes éventuelles et préciser leurs équations.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction g.



- Préciser son ensemble de définition.
- Indiquer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- Tracer les asymptotes éventuelles et préciser leurs équations.

Exercice 2 :

Dans chacun des exemples suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction et les équations d'asymptotes éventuelles.

a.

| x | 1 | $+\infty$ |
|------|---|-----------|
| f(x) | 0 | 4 |

b.

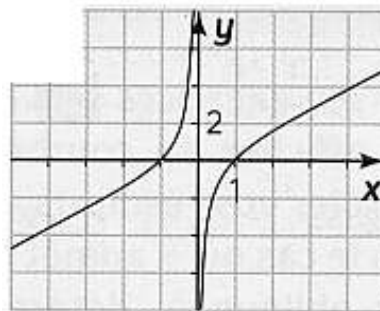
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|------|-----------|---|-----------|
| f(x) | -2 | 3 | 1 |

c.

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|------|-----------|----|-----------|
| f(x) | $+\infty$ | -2 | $+\infty$ |

Exercice 3 :

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



Préciser son ensemble de définition et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 4 :

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{3-x}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x)$.
- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x-2}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de g .
- Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x)$.
- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 5 :

1. Étudier les limites de f en a .

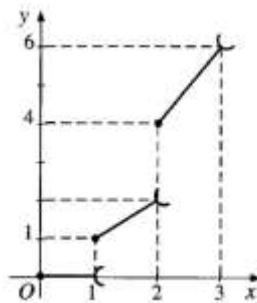
a. $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$, $a = 1$. b. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$, $a = 4$.

2. Les fonctions suivantes sont définies sur $]0 ; +\infty[$. Étudier leur limite en $+\infty$.

a. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ b. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 6 :

C est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$.



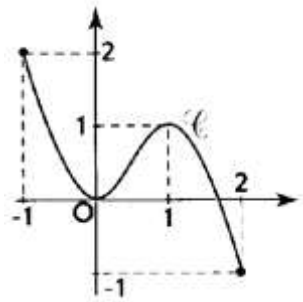
- Indiquer les points de discontinuité éventuels de f .
- Préciser $f(2)$.
 - Préciser les limites de f en 2.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 2$ si $x < -3$ et $f(x) = -x + b$ si $x \geq -3$. Existe-t-il une valeur de b pour laquelle la fonction f est continue en -3 ?

Exercice 8 :

C est la courbe représentative dans un repère d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



1. Préciser $f(-1)$ et $f(2)$.

2. Soit m un réel compris entre $f(-1)$ et $f(2)$.

Discuter suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 9 :

f est une fonction définie et continue sur $[-3 ; 4]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| | | | | |
|-----|----|---|----|-----------|
| x | -3 | 0 | 2 | 4 |
| f | 1 | 5 | -3 | $+\infty$ |

Dénombrer les solutions des équations suivantes :

a. $f(x) = 1$

b. $f(x) = -3$

c. $f(x) = 0$

d. $f(x) = 6$

e. $f(x) = -5$

f. $f(x) = 5$

Exercice 10 : Que faut-il démontrer ?

f est une fonction continue sur \mathbb{R} dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| | | | | |
|-----|-----------|----|----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | 0 | $+\infty$ |
| f | $-\infty$ | -1 | -3 | $+\infty$ |

Voici deux questions relatives à cette fonction :

Q1 : Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0 ; +\infty[$.

Q2 : Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans \mathbb{R} et que $a \geq 0$.

1. Répondre précisément à la question **Q1**.

2. Pourquoi cette réponse est-elle insuffisante pour répondre à la question **Q2**.

3. Répondre précisément à la question **Q2**.