

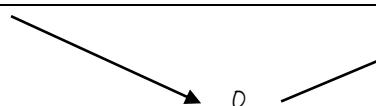
Exercice 1 :

1. $f'(x) = \exp(x) - 0 - 1 = \exp(x) - 1$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geq 1 \Leftrightarrow \exp(x) \geq \exp(0) \Leftrightarrow x \geq 0$.

On en déduit que la fonction f est : décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

2.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

3. $f(0) = \exp(0) - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$.

La fonction f admet donc un minimum en 0 et $f(0) = 0$; donc pour tout x réel : $f(x) \geq f(0)$, donc : $f(x) \geq 0$.

4. a. Pour tout $x \geq 0$: $f(x) \geq 0$; donc : $\exp(x) - 1 - x \geq 0$; d'où : $\exp(x) \geq x + 1$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$; donc par comparaison : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.

4. b. On pose : $X = -x \Leftrightarrow x = -X$. Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$.

On en déduit que :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(X)} = 0$, car : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(X) = +\infty$.

Exercice 2 :

1. $f(x) = \frac{\exp(x) - 2}{\exp(x) + 1}$.

Pour tout x réel, $\exp(x) > 0$, donc : $\exp(x) + 1 > 0$.

La fonction f est donc définie sur \mathbb{R} .

(*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-2}{1} = -2$.

© La fonction f est définie sous une forme où la limite en $+\infty$ est indéterminée.
Pour déterminer cette limite, il faut donc changer la forme sous laquelle la fonction s'écrit.

(*) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{\exp(x) - 2}{\exp(x) + 1} = \frac{\exp(x) \left(1 - \frac{2}{\exp(x)} \right)}{\exp(x) \left(1 + \frac{1}{\exp(x)} \right)} = \frac{1 - \frac{2}{\exp(x)}}{1 + \frac{1}{\exp(x)}}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$; d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

$$2. f(x) = \frac{1}{1 - \exp(x)}.$$

$f(x)$ est défini si et seulement si : $1 - \exp(x) \neq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \neq 1 \Leftrightarrow \exp(x) \neq \exp(0) \Leftrightarrow x \neq 0$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$(*) \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \exp(x) = -\infty ; \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.$$

(*) $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \exp(x) = 0$; donc pour déterminer la limite de f en 0, il faut étudier le signe de $(1 - \exp(x))$ au voisinage de 0.

$$1 - \exp(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \exp(x) \Leftrightarrow \exp(0) \geq \exp(x) \Leftrightarrow 0 \leq x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - \exp(x)$	$+$	0	$-$

On en déduit que :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \exp(x) = 0^+$, car $1 - \exp(x) > 0$ si $x < 0$; et donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\ln x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \exp(x) = 0^-$, car $1 - \exp(x) < 0$ si $x > 0$; et donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = -\infty$.

Exercice 3 :

a. La fonction \exp est définie sur \mathbb{R} , donc l'équation est définie sur \mathbb{R} .

$$\exp(x) = 4 \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \ln(4).$$

L'équation admet donc une unique solution : $x = \ln(4)$.

b. L'équation est définie sur \mathbb{R} .

$$\exp(2x - 1) = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln(2) \Leftrightarrow 2x = 1 + \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln(2)}{2}.$$

$$\text{L'équation admet donc une unique solution : } x = \frac{1 + \ln(2)}{2}.$$

c. L'équation est définie sur \mathbb{R} .

$$\exp(-x) = 5 \Leftrightarrow -x = \ln(5) \Leftrightarrow x = -\ln(5).$$

L'équation admet donc une unique solution : $x = -\ln(5)$.

d. L'équation est définie sur \mathbb{R} .

$\exp(-x + 1) = -1$: Cette équation n'a pas de solution car la fonction \exp est strictement positive.

e. La fonction \ln est définie sur $]0, +\infty[$, donc l'équation est définie si et seulement si :

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[.$$

$$\text{Pour tout } x > -1 : \ln(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \exp(\ln(x + 1)) = \exp(0) \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 > -1.$$

L'équation admet donc une unique solution : $x = 0$.

f. L'équation est définie si et seulement si : $1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[$.

$$\text{Pour tout } x > 1 : \ln(1 - x) = 1 \Leftrightarrow 1 - x = \exp(1) \Leftrightarrow 1 = e + x \Leftrightarrow x = 1 - e < 1, \text{ car } e > 0.$$

L'équation admet donc une unique solution : $x = 1 - e$.

g. L'équation est définie si et seulement si : $2 - 3x > 0 \Leftrightarrow 2 > 3x \Leftrightarrow \frac{2}{3} > x \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{2}{3}[$.

Pour tout $x < \frac{2}{3}$: $\ln(2 - 3x) = \ln 4 \Leftrightarrow 2 - 3x = 4 \Leftrightarrow 2 = 3x + 4 \Leftrightarrow -2 = 3x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$.

L'équation admet donc une unique solution : $-\frac{2}{3}$.

h. L'équation est définie si et seulement si : $4x > 0$ et $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x > 3 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in]3, +\infty[$.

Pour tout $x > 3$: $\ln(4x) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4x = x - 3 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1 \leq 3$.

L'équation n'admet donc pas de solution.

Exercice 4 :

$$a = \ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln 2$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 = -\ln(2^2) = -2 \ln 2$$

$$c = \ln(16) - 3 \ln(2) = \ln(2^4) - 3 \ln(2) = 4 \ln(2) - 3 \ln(2) = \ln 2$$

$$d = \ln(2\sqrt{2}) = \ln(2) + \ln(\sqrt{2}) = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{3}{2} \ln 2$$

Exercice 5 :

L'équation est définie si et seulement si :

$$x + 7 > 0 \text{ et } x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -7 \text{ et } x > -1 \Leftrightarrow x > -1.$$

Pour tout $x > -1$:

$$\ln(x + 7) = 2 \ln(x + 1) \Leftrightarrow \ln(x + 7) = \ln((x + 1)^2)$$

$$\Leftrightarrow x + 7 = (x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 7 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -3 \text{ (On utilise le calcul du discriminant pour déterminer les racines)}$$

$$\Leftrightarrow x = 2, \text{ car } -3 < -1.$$

L'équation admet donc une unique solution : -1 .

Exercice 6 :

$$1. a. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty.$$

$$1. b. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x} :$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty ; \text{ donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$

2. a. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$.

(*) f est définie sur $]0, +\infty[$.

(*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$.

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$.

2. b. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

$f(x)$ est défini si et seulement si : $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

(*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$.

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$.

(*) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$; donc pour déterminer la limite de $\frac{1}{\ln x}$ en 1, il faut étudier le signe de $\ln(x)$ au voisinage de 1.

$\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) \geq \exp(0) \Leftrightarrow x \geq 1$.

x	0	1	$+\infty$	
ln(x)		-	0	+

On en déduit que :

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$, car $\ln(x) < 0$ si $x < 1$; et donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$, car $\ln(x) > 0$ si $x > 1$; et donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$.

Exercice 7 :

a. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$f = \frac{u}{v}$, avec : $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$, et donc : $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.

Donc : $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; d'où : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

b. $f(x) = (\ln x)^2$

$f = u^2$, avec : $u(x) = \ln(x)$.

Donc : $f' = 2 u u'$; d'où : $f'(x) = 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$.

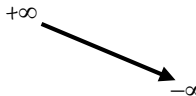
Exercice 8 :

- f est définie sur : $]0, +\infty[$.
- f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 0 - 2 \times 1 - \frac{1}{x} = -2 - \frac{1}{x} < 0, \text{ car } x > 0, \text{ et donc : } \frac{1}{x} > 0, \text{ d'où : } -\frac{1}{x} < 0.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3 - 2x = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- On en déduit le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
f		

Exercice 9 :

1. a. L'inéquation est définie sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x > 0 : \ln(x) \geq 3 &\Leftrightarrow \exp(\ln(x)) \geq \exp(3), \text{ car la fonction exp est croissante} \\ &\Leftrightarrow x \geq e^3 \Leftrightarrow x \in [e^3, +\infty[, \text{ car } e^3 > 0. \end{aligned}$$

1. b. L'inéquation est définie sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \text{ réel : } \exp(x+3) < 2 &\Leftrightarrow \ln(\exp(x+3)) < \ln(2), \text{ car la fonction ln est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow x+3 < \ln(2) \Leftrightarrow x < \ln(2) - 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \ln(2) - 3[. \end{aligned}$$

1. c. L'inéquation est définie sur $]0, +\infty[$, car : $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x > 0 : \ln(2x) - 1 \leq 0 &\Leftrightarrow \ln(2x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \exp(\ln(2x)) \leq \exp(1), \text{ car la fonction exp est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow 2x \leq e^1 \Leftrightarrow x \leq \frac{e}{2} \Leftrightarrow x \in]0, \frac{e}{2}]. \end{aligned}$$

$$2. a. 3^n \geq 10^6 \Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(10^6) \Leftrightarrow n \ln(3) \geq \ln(10^6)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^6)}{\ln(3)}, \text{ car } \ln(3) > 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 13, \text{ car } \frac{\ln(10^6)}{\ln(3)} \approx 12,58$$

$$2. b. 0,7^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \ln(0,7^n) \leq \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow n \ln(0,7) \leq \ln(10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,7)}, \text{ car } \ln(0,7) < 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 26, \text{ car } \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0,7)} \approx 25,82$$