

2 - SUITES - COURS

1) Définitions, vocabulaire et notations :

Définition 1 :

Une **suite numérique** u est une fonction, définie de \mathbf{N} dans \mathbf{R} , à partir d'un certain rang n_0 , c'est-à-dire pour tout $n \geq n_0$.

Si n est un entier $\geq n_0$, l'image de n par u sera notée u_n (plutôt que $u(n)$) : se lit « u n » ou « u indice n ».

On dira donc que u_n est le terme d'**indice** n de la suite u .

On dira que la suite u est la suite de **terme général** u_n .

Elle pourra également être notée $(u_n)_{n \geq n_0}$, ou plus simplement (u_n) .

En pratique :

Une suite peut-être définie :

1. Par une **formule explicite** permettant de calculer u_n en fonction de n pour tout $n \geq n_0$: $u_n = f(n)$.

2. Par une **relation de récurrence** permettant de calculer un terme en fonction du (ou de certains) terme(s) précédent(s).

Par exemple, l'égalité suivante : $u_{n+1} = f(u_n)$, est une relation de récurrence dans laquelle tout terme de la suite u se calcule en fonction du terme précédent.

Exercice 1

2) Sens de variation :

Définition 2 :

La suite (u_n) est dite :

- **Croissante** à partir du rang n_1 , si pour tout $n \geq n_1$: $u_{n+1} \geq u_n$.
- **Décroissante** à partir du rang n_1 , si pour tout $n \geq n_1$: $u_{n+1} \leq u_n$.
- **Monotone** à partir d'un certain rang, si elle est croissante ou décroissante à partir de ce rang.
- **Constante** à partir du rang n_1 , si pour tout $n \geq n_1$: $u_{n+1} = u_n$.

Méthode 1 :

Pour étudier le sens de variation d'une suite on peut étudier le signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$.

Exercices 2 & 3

3) Suites arithmétiques et suites géométriques :

Définition 3 :

- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite **arithmétique** si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier $n \geq n_0$: $u_{n+1} = u_n + r$.

La constante réelle r (indépendante de n) est appelée **raison** de la suite.

- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite **géométrique** si et seulement si il existe un réel q tel que pour tout entier $n \geq n_0$: $u_{n+1} = q \times u_n$.

La constante réelle q (indépendante de n) est appelée **raison** de la suite.

Méthode 2 :

- Pour démontrer qu'une suite u est arithmétique, on peut démontrer que la différence entre 2 termes consécutifs : $u_{n+1} - u_n$, est constante.
- Pour démontrer qu'une suite u , dont tous les termes sont non nuls, est géométrique, on peut démontrer que le quotient entre 2 termes consécutifs : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, est constant.

Exercice 4

Formules explicites :

- Si (u_n) est une suite arithmétique, alors pour tout $n \geq 0$ on a : $u_n = u_0 + n \times r$.
- Si (u_n) est une suite géométrique, alors pour tout $n \geq 0$ on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exercice 5

Somme de termes consécutifs d'une progression géométrique :

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors : $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Propriété :

Soit $q \in [0, +\infty[$. Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \leq q < 1 \\ 1 & \text{Si } q = 1 \\ +\infty & \text{Si } q > 1 \end{cases}$

Exercice 6

2 - SUITES - EXERCICES

Temps indicatif à consacrer aux exercices : 3 à 5h.

Exercice 1 :

Pour chacune des suites définies ci-dessous, indiquer s'il s'agit d'une définition explicite ou par récurrence ; puis calculer u_3 .

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = n + 1 + \frac{1}{n}$.

2. $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{u_n}$.

3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{u_n}$.

Exercice 2 :

Pour chacune des suites définies ci-dessous :

a) Calculer : $u_n + 1$ et u_{n+1} .

b) Calculer : $u_{n+1} - u_n$.

c) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

1. $u_n = 3n + 1$

2. $u_n = n^2$

3. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

Exercice 3 :

Etudier le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous :

a) $u_n = \frac{1-n}{1+n}$

b) $u_n = n^2 - 5n$

c) $u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Exercice 4 :

1. Démontrer que la suite u définie par : $u_n = 3n + 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, est arithmétique.

On précisera sa raison et son premier terme.

2. Démontrer que la suite v définie par : $v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, est géométrique.

On précisera sa raison et son premier terme.

Exercice 5 :

Soit u la suite définie par : $u_0 = 30$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{9}{10} u_n + 2$.

On définit alors la suite v par : $v_n = u_n - 20$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2. Exprimer v_n ; puis u_n , en fonction de n .

Exercice 6 :

Soit u la suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .

2. En déduire une expression de S_n en fonction de n .

3. Etudier la limite de u_n ; puis de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.