

Exercice 1 :

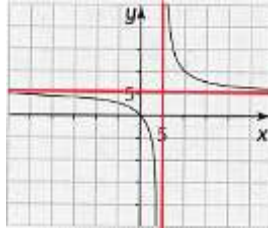
1. a. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{5\} = ]-\infty, 5[ \cup ]5, +\infty[$ .

1. b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ ;  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ .

1. c. La courbe représentative de  $f$ , admet deux asymptotes :

(\*) Une asymptote horizontale d'équation :  $y = 5$  ;

(\*) Une asymptote verticale d'équation :  $x = 5$ .



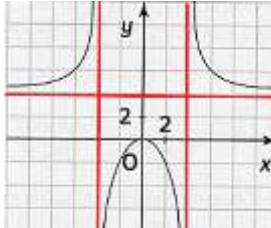
2. a. La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} = ]-\infty, -4[ \cup ]-4, 4[ \cup ]4, +\infty[$ .

2. b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow -4^-} g(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -4^+} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$ .

2. c. La courbe représentative de  $g$ , admet trois asymptotes :

(\*) Une asymptote horizontale d'équation :  $y = 4$  ;

(\*) Deux asymptotes verticales d'équations :  $x = -4$  et  $x = 4$ .



Exercice 2 :

a. La fonction  $f$  est définie sur  $[1, +\infty[$ .

Sa courbe représentative admet : (\*) En  $+\infty$  une asymptote horizontale d'équation :  $y = 4$ .

b. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

Sa courbe représentative admet : (\*) En  $-\infty$  une asymptote horizontale d'équation :  $y = -2$ .

(\*) En  $+\infty$  une asymptote horizontale d'équation :  $y = 1$ .

c. La fonction  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

Sa courbe représentative admet : (\*) Une asymptote verticale d'équation :  $x = 0$ .

Exercice 3 :

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

#### Exercice 4 :

1. a. La fonction  $f$  est définie en  $x$  si et seulement si :  $3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ .

$f$  est donc définie sur :  $\mathbb{R} \setminus \{3\} = ]-\infty, 3[ \cup ]3, +\infty[$ .

1. b. Etudions le signe de :  $3 - x$ .

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$3 - x$	$+$	$0$	$-$

On a :  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6$ .

De plus, d'après le tableau de signe ci-dessus, on a :

$$(*) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} 3 - x = 0^+, \text{ donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty.$$

$$(*) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 3 - x = 0^-, \text{ donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty.$$

1. c. Pour tout  $x > 3$ , on a :  $f(x) = \frac{2x}{3-x} = \frac{2x}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)} = \frac{2}{\frac{3}{x}-1}$ .

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{-1} = -2$ .

1. d. La courbe représentative de la fonction  $f$  admet donc pour asymptotes les droites d'équations  $x = 3$ , et  $y = -2$ , en  $+\infty$ .

2. a. La fonction  $g$  est définie en  $x$ , si et seulement si :  $x^2 - x - 2 = 0$ .

Le discriminant de ce trinôme est égale à :  $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ .

Le trinôme admet donc 2 racines réelles distinctes :  $\frac{1+3}{2} = 2$  et  $\frac{1-3}{2} = -1$ .

La fonction  $g$  est donc définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 2[ \cup ]2, +\infty[$ .

2. b. Etudions le signe de :  $x^2 - x - 2$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

On a :  $\lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2$ .

De plus, d'après le tableau de signe ci-dessus, on a :

$$(*) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x^2 - x - 2 = 0^+, \text{ donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty.$$

$$(*) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x^2 - x - 2 = 0^-, \text{ donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty.$$

2. c. Pour tout  $x > 2$ , on a :  $g(x) = \frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0. \text{ On a donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1.$$

On en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$  ; et enfin que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

2. d. La courbe représentative de la fonction  $g$  admet donc pour asymptotes les droites d'équations  $x = -1$ , et  $y = 0$ , en  $+\infty$ .

### Exercice 5 :

1. a.  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ .

☺ Le numérateur et le dénominateur s'annulent pour  $x = 1$ . Pour lever l'indétermination, on cherche à factoriser le numérateur.

Déterminons les racines du trinôme :  $2x^2 - x - 1$ .

Son déterminant est égal à :  $(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$ .

Ce trinôme admet donc 2 racines réelles distinctes :  $\frac{1+3}{4} = 1$  et  $\frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ .

On a donc :  $2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)(x - (-\frac{1}{2})) = 2(x - 1)(x + \frac{1}{2}) = (x - 1)(2x + 1)$ .

On a donc :  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(2x + 1)}{x - 1} = 2x + 1$ .

On en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$ .

1. b.  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ .

☺ Le numérateur et le dénominateur s'annulent pour  $x = 4$ .

Pour lever l'indétermination, on peut factoriser le dénominateur ou utiliser la quantité conjuguée du numérateur.

•  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ .

•  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ .

On en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2 + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{4}$ .

2. a.  $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \cos(0) = 1$ .

2. b.  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  ; donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sin(0) = 0$ .

### Exercice 6 :

1. La fonction  $f$  est discontinue en 1 et en 2, car en ces deux points, on doit lever le crayon pour tracer la courbe de  $f$ .

2. a.  $f(2) = 4$ .

2. b.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = 2$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = 4$ .

### Exercice 7 :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} x + 2 = -1$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} -x + b = 3 + b$ .

La fonction  $f$  est donc continue en  $-3$  si et seulement si :  $-1 = 3 + b \Leftrightarrow b = -1 - 3 = -4$ .

### Exercice 8 :

1. La fonction  $f$  est continue sur son ensemble de définition, car on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.
2. a.  $f(-1) = 2$  et  $f(2) = -1$ .
2. b. (i)  $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 2$ .  
(ii)  $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -1$ .
3. a. L'équation :  $f(x) = 1$ , admet 2 solutions.
3. b. Soit  $m \in [-1, 2]$ .
  - Si  $m \in [-1, 0[$ , l'équation :  $f(x) = m$ , admet une solution.
  - Si  $m = 0$ , l'équation :  $f(x) = m$ , admet deux solutions.
  - Si  $m \in ]0, 1[$ , l'équation :  $f(x) = m$ , admet trois solutions.
  - Si  $m = 1$ , l'équation :  $f(x) = m$ , admet deux solutions.
  - Si  $m \in ]1, 2]$ , l'équation :  $f(x) = m$ , admet une solution.

### Exercice 9 :

- a. L'équation :  $f(x) = 1$ , admet trois solutions.
- b. L'équation :  $f(x) = -3$ , admet une solution.
- c. L'équation :  $f(x) = 0$ , admet deux solutions.
- d. L'équation :  $f(x) = 6$ , admet une solution.
- e. L'équation :  $f(x) = -5$ , admet zéro solution.
- f. L'équation :  $f(x) = 5$ , admet deux solutions.

### Exercice 10 : Que faut-il démontrer ?

1. La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .  
On a :  $f(0) = -3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Or :  $0 \in [-3, +\infty[$ , donc l'équation :  $f(x) = 0$ , admet une unique solution dans  $[0, +\infty[$ .
2. Cette réponse ne permet pas de conclure que la fonction  $f$  s'annule une seule fois sur  $\mathbb{R}$ , car elle ne dit rien du comportement de la fonction  $f$  sur l'intervalle :  $] -\infty, 0[$ .
3. La fonction  $f$  admet un maximum égal à  $-1$ , sur l'intervalle :  $] -\infty, 0]$ . Donc  $f$  ne s'annule pas sur cet intervalle.  
On en déduit que l'équation :  $f(x) = 0$ , admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$  et cette solution  $a \in [0, +\infty[$ .