

### 3 - FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME - COURS

#### 1) La fonction exponentielle :

##### Définition :

La fonction exponentielle, notée  $\exp$ , est l'unique fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que :  $\exp' = \exp$  et  $\exp(0) = 1$ .

##### Propriété 1 :

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :

1.  $\exp(x) > 0$

2.  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

3.  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

4.  $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

5. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  :  $\exp(nx) = (\exp x)^n$ .

##### Notations :

On note  $e$  le nombre  $\exp(1)$ .

##### Propriété 2 :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier pour  $x$  et  $y$  réels :  $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$

$$\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$$

[Exercice 1](#)

##### Propriété 4 :

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

[Exercice 2](#)

#### 2) La fonction logarithme :

##### Propriété 5 :

- La fonction  $\ln$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .
- $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$ .
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $b \in ]0, +\infty[$  :  $b = \exp(a) \Leftrightarrow a = \ln(b)$ .

[Exercice 3](#)

##### Propriété :

Soient  $a, b \in ]0, +\infty[$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  :

1.  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ .

2.  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ .

3.  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

4.  $\ln(a^n) = n \ln(a)$

5.  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

[Exercices 4 & 5](#)

### Propriété 6 :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

Exercice 6

### Propriété :

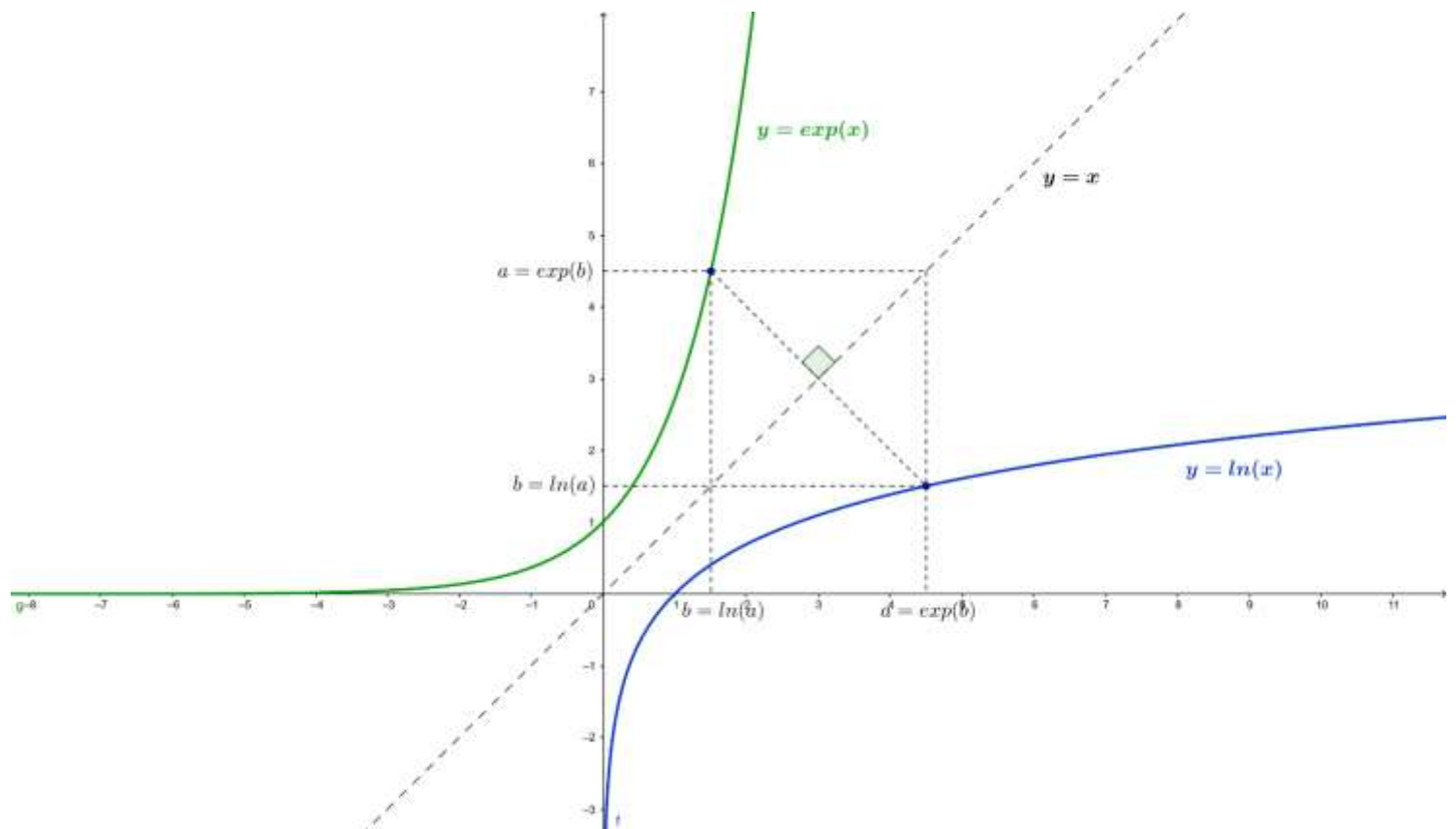
La fonction  $\ln : x \mapsto \ln(x)$  est définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[ : (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ .

Exercice 7

### Propriété :

La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

Exercices (+), 7 & 8



### 3 - EXP & LN - EXERCICES

Temps indicatif à consacrer aux exercices : 6 à 9h.

#### Exercice 1 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \exp(x) - 1 - x$ .

1. Calculer  $f'(x)$  ; étudier son signe et en déduire le sens de variation de  $f$ .
2.
  - a. Calculer  $f(0)$ . En déduire le signe de  $f$ .
  - b. Justifier que pour tout  $x \geq 0$  :  $\exp(x) \geq x + 1$  et en déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)$ .
  - c. Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$ . (On pourra poser  $X = -x$ ).

#### Exercice 2 :

Préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$ . Etudier les limites de la fonction  $f$  aux bornes de cet ensemble.

1.  $f(x) = \frac{\exp(x) - 2}{\exp(x) + 1}$ .
2.  $f(x) = \frac{1}{1 - \exp(x)}$ .

#### Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes :

- |                     |                       |                          |                           |
|---------------------|-----------------------|--------------------------|---------------------------|
| a. $\exp(x) = 4$    | b. $\exp(2x - 1) = 2$ | c. $\exp(-x) = 5$        | d. $\exp(-x + 1) = -1$    |
| e. $\ln(x + 1) = 0$ | f. $\ln(1 - x) = 1$   | g. $\ln(2 - 3x) = \ln 4$ | h. $\ln(4x) = \ln(x - 3)$ |

☺ On commencera par déterminer l'ensemble de définition de chaque équation.

#### Exercice 4 :

Exprimer les réels suivants en fonction de  $\ln(2)$  :  $a = \ln(8)$ ,  $b = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ ,  $c = \ln(16) - 3 \ln(2)$ ,  $d = \ln(2\sqrt{2})$ .

#### Exercice 5 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $\ln(x + 7) = 2 \ln(x + 1)$ .

☺ On commencera par déterminer l'ensemble de définition de cette équation.

#### Exercice 6 :

1. Calculer les limites suivantes :
 

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x))$	b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$
---	--

2. Déterminer les ensembles de définition des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$	b. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
----------------------------------	-----------------------------

Puis calculer les limites de ces fonctions aux bornes de leurs ensembles de définition.

#### Exercice 7 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$	b. $f(x) = (\ln x)^2$
-----------------------------	-----------------------

#### Exercice 8 :

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 3 - 2x - \ln(x)$ .

Etudier la fonction  $f$  sur son ensemble de définition que l'on déterminera ; puis dresser son tableau de variations.

#### Exercice 9 :

$x$  et  $n$  sont respectivement des inconnues réelle et entière. Résoudre les inéquations suivantes :

- |                    |                      |                         |                    |                         |
|--------------------|----------------------|-------------------------|--------------------|-------------------------|
| a. $\ln(x) \geq 3$ | b. $\exp(x + 3) < 2$ | c. $\ln(2x) - 1 \leq 0$ | d. $3^n \geq 10^6$ | e. $0,7^n \leq 10^{-4}$ |
|--------------------|----------------------|-------------------------|--------------------|-------------------------|